Unidad III

Distribuciones de Probabilidad Discretas

3.1. Definición de variable aleatoria discreta.

Una variable aleatoria (v.a.) es una función que asocia a cada resultado del espacio muestral un número real

Tipología: V.a. discreta y v.a. continua

Discreta: Toma valores en un conjunto numerable

Continua: Toma valores en un conjunto infinito no numerable

Ejemplo: Se realiza un experimento en un laboratorio cuyo resultado puede ser positivo o negativo. Construir el espacio muestral y dar una v.a. asociada al experimento.

X (Positivo)= 1

E = {Positivo, Negativo}

X (Negativo)= 0

X es una variable aleatoria

3.2. Función de probabilidad y de distribución, valor esperado, varianza y desviación estándar.

Una fracción en la que el numerador es igual al número de apariciones del suceso y el denominador es igual al número total de casos en los que es suceso pueda o no pueda ocurrir. Tal fracción expresa la probabilidad de que ocurra el suceso".
El enfoque clásico de la probabilidad está basado en la suposición de que todos los resultados del experimento son igualmente posibles. La probabilidad se calcula de la siguiente manera:

$$\text{Probabilidad} = \frac{\text{número de posibles resultados del evento}}{\text{número total de resultados posibles del experimento}}$$

Ejemplo:
El experimento es lanzar un dado. ¿Cuál es la probabilidad de que caiga un dos

hacia arriba?
Las caras el dado están numeradas del 1 al 6, entonces hay una posibilidad de un total de seis de que el número 2 quede hacia arriba:

$$P(\text{cae } 2) = \frac{1}{6} = 0.166$$

La principal dificultad que presenta esta interpretación de la probabilidad es que se basa en sucesos equiprobables, siendo fácil para problemas sencillos, como los de cartas, dados o urnas, es casi imposible para problemas más complejos.

Frecuencia relativa

Es la relación o cociente entre la frecuencia absoluta y el número total de observaciones.
Es la proporción entre la frecuencia de un intérvalo y el número total de datos.

3.3. Distribución Binomial.

El término *éxito y fracaso* son términos estadísticos y no necesariamente tienen el significado común que se les da. El *éxito* significa "la ocurrencia de un evento particular" (por ejemplo, "la pieza es defectuosa"), y el *fracaso* es la ausencia del evento.

Una variable aleatoria, X, que cuenta el número de éxitos en *n* pruebas Bernoulli, donde *p* es la probabilidad de éxito en cualquier prueba, se dice que sigue la distribución binomial con parámetros *n* y *p*. A la variable aleatoria X se le llama variable aleatoria binomial.

Características de la distribución Binomial

- Resumiendo entonces, un experimento binomial es aquél que posee las siguientes cinco características:

1. El experimento consiste de n pruebas idénticas.

2. Cada prueba tiene dos posibles resultados, llamados éxito y fracaso. Ambos resultados son mutuamente excluyentes.

3. La probabilidad de éxito, denotada por p, permanece constante de prueba a prueba. La probabilidad de fracaso se denota por q, donde q=1-p.

4. Las n pruebas son independientes. Esto es, el resultado de una prueba no afecta el resultado de otra.

5. La variable aleatoria de interés, X, *es el número de éxitos observados durante las n pruebas.*

La distribución de probabilidad binomial

- La fórmula de la distribución de probabilidad binomial se enuncia a continuación.

$$P(x) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x} = \frac{n!}{x!(n-x)!} p^x q^{n-x}$$

Donde:
p = probabilidad de éxito en cualquier prueba.
q = 1 – p.
n = número de pruebas.
x = número de éxitos.

• *Uso de tablas de la distribución binomial*

- Para facilitar el uso de la distribución binomial, la distribución ha sido tabulada para varios valores de n y de p.

- La tabla lista las probabilidades acumuladas para la distribución binomial, F(x). Recuerde que F(x) es la suma de las probabilidades de todos los valores de i menores o iguales a x.

- La tabla de la distribución binomial lista las probabilidades acumuladas para valores de p menores o iguales a 0.50, para una n menor o igual a 20.

$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{\forall i \leq x} P(i)$$

3.4. Distribución Hipergeométrica

Suponga que está seleccionando una muestra de elementos de una población y anota si cada uno posee cierta característica o no. Usted está registrando los datos característicos de "éxito" ó "fracaso" encontrados en el experimento binomial.
Si el número de elementos en la población es grande en relación con el número en la muestra, la probabilidad de seleccionar un éxito en un solo ensayo es igual a la proporción p de éxitos en la población. Debido a que la población es grande con respecto al tamaño de la muestra, esta probabilidad permanecerá constante (para fines prácticos) de un ensayo a otro, y el numero x de éxitos en la muestra seguirá una distribución de probabilidad binomial. Sin embargo, si el número de elementos en la población es pequeño con respecto al tamaño de la muestra (*n/N 2≥05*), la probabilidad de un éxito para un ensayo dado depende de los resultados de ensayos anteriores. Entonces el numero x de éxitos sigue **una distribución de probabilidad hipergeométrica.**

Es fácil visualizar la variable aleatoria hipergeométrica x si se piensa en un recipiente que contiene M pelotas rojas y N - M pelotas blancas, para un *total de N* pelotas en el recipiente. Usted selecciona n pelotas del recipiente y anota x, el número de pelotas rajas que ve. Si ahora define que una pelota raja es un "éxito", tiene un ejemplo de variable aleatoria hipergeométrica x.

La fórmula para calcular la probabilidad de exactamente k éxitos en n ensayos se da a continuación.

DISTRIBUCIÓN DE PROBABILIDAD HIPERGEOMÉTRICA

Una población contiene M éxitos y N - M fracasos. La probabilidad de exactamente k éxitos en una muestra aleatoria de tamaño n es

$$P(x = k) = \frac{C_k^M C_{n-k}^{N-M}}{C_n^N}$$

Características de la distribución hipergeométrica

- La distribución hipergeométrica se utiliza en lugar de la binomial cuando n es relativamente grande en comparación de N.

- Un experimento hipergeométrico cumple con las siguientes dos características:

1. Una muestra aleatoria de tamaño n se escoge de una población de tamaño N.

2. S de las N entidades se clasifican como éxitos y N-S se clasifican como fracasos.

Nota: Para usar la distribución hipergeométrica en lugar de la binomial, recuerde que:

(N/n < 10)

La fórmula de la distribución de probabilidad hipergeométrica se enuncia a continuación:

La distribución de probabilidad hipergeométrica. *(N/n < 10)*

$$p(x) = \frac{\binom{S}{x}\binom{N-S}{n-x}}{\binom{N}{n}}$$

N = Tamaño de la población.
n = Tamaño de la muestra.
S = Número de éxitos en toda la población.
X = Número de éxitos en el experimento.

Media y varianza de la distribución hipergeométrica

Media de la distribución hipergeométrica:

$$\mu = E(X) = \frac{nS}{N}$$

Varianza de la distribución hipergeométrica:

$$\sigma^2 = \left(\frac{N-n}{N-1}\right)(n)\left(\frac{S}{N}\right)\left(1-\frac{S}{N}\right)$$

3.4.1 Aproximación de la Hipergeométrica por la Binomial.

- Cuando N es grande y n es relativamente pequeña entonces la distribución correcta a utilizar es la binomial. Se puede probar que la función de probabilidad hipergeométrica converge a la función de probabilidad binomial cuando N es grande.

$$\lim_{N \to \omega} \frac{\binom{S}{x}\binom{N-S}{n-x}}{\binom{N}{n}} = \binom{n}{x} p^{x}(1-p)^{n-x}$$

• Desventaja de la distribución hipergeométrica

Generalmente el muestreo se hace a partir de una población grande, por lo que la distribución hipergeométrica es mucho menos usada en la vida real que la binomial. Sin embargo, si la población es pequeña, entonces la distribución correcta a utilizar será la hipergeométrica.

Recuerde que se recomienda usar la distribución hipergeométrica cuando:

N / n < 10

3.5. Distribución Geométrica.

En teoría de probabilidad y estadística, la **distribución geométrica** es cualquiera de las dos distribuciones de probabilidad discretas siguientes:

- la distribución de probabilidad del número *X* del ensayo de Bernoulli necesaria para obtener un éxito, contenido en el conjunto { 1, 2, 3,...} o
- la distribución de probabilidad del número *Y* = *X* − 1 de fallos antes del primer éxito, contenido en el conjunto { 0, 1, 2, 3,... }.

Cual de éstas es la que uno llama "la" distribución geométrica, es una cuestión de convención y conveniencia.

Propiedades[editar · editar código]

Si la probabilidad de éxito en cada ensayo es *p*, entonces la probabilidad de que *x* ensayos sean necesarios para obtener un éxito es

$$P(X = x) = (1-p)^{x-1}p$$

para x = 1, 2, 3,.... Equivalentemente, la probabilidad de que haya x fallos antes del primer éxito es

$$P(Y = x) = (1 - p)^x p$$

para x = 0, 1, 2, 3,....

En ambos casos, la secuencia de probabilidades es una progresión geométrica.

El valor esperado de una variable aleatoria X distribuida geométricamente es

$$E(X) = \frac{1}{p}.$$

y dado que $Y = X-1$,

$$E(Y) = \frac{1-p}{p}.$$

En ambos casos, la varianza es

$$\mathrm{var}(Y) = \mathrm{var}(X) = \frac{1-p}{p^2}.$$

Las funciones generatrices de probabilidad de X y la de Y son, respectivamente,

$$G_X(s) = \frac{sp}{1 - s(1-p)} \quad \text{y} \quad G_Y(s) = \frac{p}{1 - s(1-p)}, \quad |s| < (1-p)^{-1}.$$

Como su análoga continua, la distribución exponencial, la distribución geométrica carece de memoria. Esto significa que si intentamos repetir el experimento hasta el primer éxito, entonces, dado que el primer éxito todavía no ha ocurrido, la distribución de probabilidad condicional del número de ensayos adicionales no depende de cuantos fallos se hayan observado. El dado o la moneda que uno lanza no tiene "memoria" de estos fallos. La distribución geométrica es de hecho la única distribución discreta sin memoria.

De todas estas distribuciones de probabilidad contenidas en {1, 2, 3,... } con un valor esperado dado μ, la distribución geométrica X con parámetro p = 1/μ es la de mayor entropía.

La distribución geométrica del número y de fallos antes del primer éxito es infinitamente divisible, esto es, para cualquier entero positivo n, existen variables aleatorias independientes $Y_1,\ldots, Y_n$ distribuidas idénticamente la suma de las cuales tiene la misma distribución que tiene *Y*. Estas no serán geométricamente distribuidas a menos que *n* = 1.

3.6. Distribución Multinomial.

En teoría de probabilidad, la **distribución multinomial** es una generalización de la distribución binomial.

La distribución binomial es la probabilidad de un número de éxitos en N sucesos de Bernoulli independientes, con la misma probabilidad de éxito en cada suceso. En una distribución multinomial, el análogo a la distribución de Bernoulli es la distribución categórica, donde cada suceso concluye en únicamente un resultado de un número finito K de los posibles, con probabilidades $p_1, \dots, p_k$ (tal que $p_i \geq 0$ para i entre 1 y K y $\sum_{i=1}^{k} p_i = 1$); y con n sucesos independientes.

Entonces sea la variable aleatoria x_i, que indica el número de veces que se ha dado el resultado i sobre los n sucesos. El vector $x = (x_1, ..., x_k)$ sigue una distribución multinomial con parámetros n y p, donde $p = (p_1, ..., p_k)$.

Nótese que en algunos campos las distribuciones categórica y multinomial se encuentran unidas, y es común hablar de una distribución multinomial cuando el término más preciso sería una distribución categórica.

3.7. Distribución de Poisson.

La distribución de Poisson se llama así en honor a Simeón Dennis Poisson (1781-1840), francés que desarrolló esta distribución basándose en estudios efectuados en la última parte de su vida.
• Características generales de la Poisson

El número de vehículos que pasan por una caseta de cobro sirve como ejemplo para mostrar las características de una distribución de probabilidad de Poisson.

Si dividimos las horas de gran tráfico en periodos (intervalos) de un segundo cada uno, encontraremos lo siguiente:
1) La probabilidad de que exactamente un vehículo llegue por segundo a una caseta individual es un número muy pequeño y es constante para que cada intervalo de un segundo.

2) La probabilidad de que dos o más vehículos lleguen en un intervalo de un segundo es tan reducida que podemos asignarle un valor cero.

3) El número de vehículos que llegan en determinado intervalo de un segundo es independiente del momento en que el intervalo de un segundo ocurre.

4) El número de llegadas en cualquier intervalo de un segundo no depende del número de arribos de cualquier otro intervalo de un segundo.
Un sistema que cumple estas características sigue la Poisson.

• Aplicaciones de la Poisson

La distribución de probabilidad Poisson provee un buen modelo para la distribución de probabilidad del número X de eventos raros que ocurren en el espacio, tiempo, volumen o cualquier otra dimensión, donde es el valor promedio de X.

Ejemplos de procesos Poisson:

1. Número de accidentes de autos por semana.

2. Número de accidentes industriales por día.

3. Número de llamadas telefónicas que entran a un conmutador por hora.

4. Número de partículas radioactivas que impactan dentro de un centímetro cuadrado por minuto.

5. Número de errores que una secretaria comete por página.

La fórmula de la distribución de probabilidad Poisson se enuncia a continuación:

$$P(x) = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}$$

λ= Media de la distribución Poisson (y también es la varianza).
e = base del logaritmo natural (e=2.71828…)

3.8. Aproximación de la Binomial por la de Poisson.

En este caso se determinarán probabilidades de experimentos Binomiales, pero que dadas sus características, es posible aproximarlas con la distribución de Poisson, estas características son, n $\infty\rightarrow$ (n es muy grande) y p$\rightarrow$0 (p es muy pequeña), por lo que:

$$p(x,n,p) = {}_nC_x p^x q^{n-x} \cong \frac{\lambda^x \varepsilon^{-\lambda}}{x!}$$

La expresión anterior solo se cumple cuando n $\rightarrow\infty$ y p$\rightarrow$0, solo en este caso, si esto no se cumple, la aproximación no se puede llevar a efecto, por lo que la fórmula a utilizar en este caso sería:

$$p(x,\lambda) = \frac{\lambda^x \varepsilon^{-\lambda}}{x!}$$

Donde:

λ =μ= np = número esperado de éxitos = tasa promedio de éxitos

n = número de repeticiones del experimento

p = probabilidad de éxito = p(éxito)

Una regla general aceptable es emplear esta aproximación si n$\geq$20 y p$\leq$0.05: sí n$\geq$100, la aproximación es generalmente excelente siempre y cuando np$\leq$10.

Ejemplos:

1. 1. Se sabe que el 5% de los libros encuadernados en cierto taller tienen encuadernaciones defectuosas. Determine la probabilidad de que 2 de 100 libros encuadernados en ese taller, tengan encuadernaciones defectuosas,

usando, a) la fórmula de la distribución Binomial, b) la aproximación de Poisson a la distribución Binomial.

Solución:

a) n = 100

p = 0.05 = p(encuadernación defectuosa) = p(éxito)

q = 0.95 = p(encuadernación no defectuosa) = p(fracaso)

x = variable que nos define el número de encuadernaciones defectuosas en la muestra = = 0, 1, 2, 3,....,100 encuadernaciones defectuosas

$$P(x = 2, n = 100, p = 0.05) = {}_{100}C_2 (0.05)^2 (0.95)^{98} = (4950)(0.05)^2(0.95)^{98} = 0.0812$$

b)n = 100 encuadernaciones

p = 0.05

λ = np = (100)(0.05)= 5

x = variable que nos define el número de encuadernaciones defectuosas en la muestra = = 0, 1, 2, 3,....,100 encuadernaciones defectuosas

$$p(x = 2, \lambda = 5) = \frac{\lambda^x \varepsilon^{-\lambda}}{x!} = \frac{(5)^2(2.718)^{-5}}{2!} = 0.0843$$

Al comparar los resultados de las probabilidades con una y otra distribución, nos damos cuenta de que la diferencia entre un cálculo y otro es de tan solo 0.0031, por lo que la aproximación de Poisson es una buena opción para calcular probabilidades Binomiales.

2.Un fabricante de maquinaria pesada tiene instalados en el campo 3840 generadores de gran tamaño con garantía. Sí la probabilidad de que cualquiera de ellos falle durante el año dado es de 1/1200 determine la probabilidad de que a) 4 generadores fallen durante el año en cuestión, b) que más 1 de un generador falle durante el año en cuestión.

Solución:

a) n = 3840 generadores

p = 1/1200 = probabilidad de que un generador falle durante el año de garantía

λ = np = (3840)(1/1200) = 3.2 motores en promedio pueden fallar en el año de garantía

x = variable que nos define el número de motores que pueden fallar en el año de garantía =

= 0, 1, 2, 3,....,3840 motores que pueden fallar en el año de garantía

$$p(x = 4, \lambda = 3.2) = \frac{(3.2)^4 (2.718)^{-3.2}}{4!} = 0.17815$$

b) p(x=2,3,4,....,3840;λ=3.2)=1-p(x=0,1;λ=3.2) =

$$= 1 - \left(\frac{(3.2)^0 (2.718)^{-3.2}}{0!} + \frac{(3.2)^1 (2.718)^{-3.2}}{1!} \right)$$

=1- (0.04078 + 0.13048) = 0.82874

3. En un proceso de manufactura, en el cual se producen piezas de vidrio, ocurren defectos o burbujas, ocasionando que la pieza sea indeseable para la venta. Se sabe que en promedio 1 de cada 1000 piezas tiene una o más burbujas. ¿Cuál es la probabilidad de que en una muestra aleatoria de 8000 piezas, menos de 3 de ellas tengan burbujas?

Solución:

n = 8000 piezas

p = 1/1000= 0.001 probabilidad de que una pieza tenga 1 o más burbujas

λ = np = (8000)(1/1000) = 8 piezas en promedio con 1 o más burbujas

x = variable que nos define el número de piezas que tienen 1 o más burbujas =

= 0,1, 2, 3,....,8000 piezas con una o más burbujas

$$p(x = 0,1,2; \lambda = 8) = \frac{(8)^0(2.718)^{-8}}{0!} + \frac{(8)^1(2.718)^{-8}}{1!} + \frac{(8)^2(2.718)^{-8}}{2!} =$$

= 0.000336 + 0.002686 + 0.010744 = 0.013766

3.9. Distribución Binomial Negativa

En estadística la **distribución binomial negativa** es una distribución de probabilidad discreta que incluye a la **distribución de Pascal**.

El número de experimentos de Bernoulli de parámetro θ independientes realizados *hasta la consecución del k-ésimo éxito* es una variable aleatoria que tiene una distribución binomial negativa con parámetros *k* y θ.

La distribución geométrica es el caso concreto de la binomial negativa cuando *k = 1*.

Propiedades

Su función de probabilidad es

$$b^*(x;k,\theta) = \binom{x-1}{x-k}\theta^k(1-\theta)^{x-k} = \binom{x-1}{k-1}\theta^k(1-\theta)^{x-k}$$

para enteros *x* mayores o iguales que *k*, donde

$$\binom{x-1}{k-1} = \binom{x-1}{x-k} = \frac{(x-1)!}{(k-1)!(x-k)!}.$$

Su media es

$$\mu = \frac{k(1-\theta)}{\theta}$$

si se piensa en el *número de fracasos* únicamente y

$$\mu = \frac{k}{\theta}$$

si se cuentan también los *k*-1 éxitos.

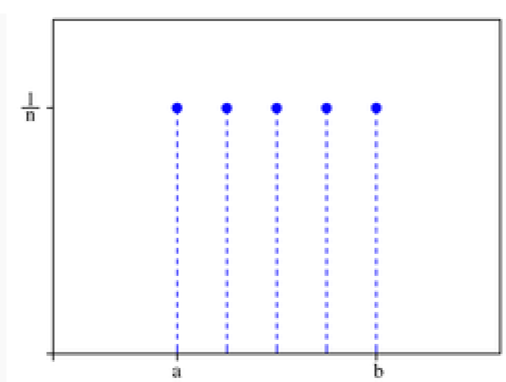
Su varianza es

$$\sigma^2 = \frac{k(1-\theta)}{\theta^2}$$

3.10 Distribución Uniforme (Discreta)

En teoría de la probabilidad, la **distribución uniforme discreta** es una distribución de probabilidad que asume un número finito de valores con la misma probabilidad.

Propiedades



Distribución uniforme (caso discreto).

Si la distribución asume los valores reales $x_1, x_2 \ldots x_n$, su función de probabilidad es

$$p(x_i) = \frac{1}{n}$$

y su función de distribución la función escalonada

$$F(x) = \frac{1}{n} \sum_i 1_{(-\infty, x]}(x_i).$$

Su media estadística es

$$\mu = \sum_i^n x_i / n$$

y su varianza

$$\sigma^2 = \sum_i^n (x_i - \mu)^2 / n$$